ÉPREUVE DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUES MATHÉMATIQUES

(Option générale et option agronomie)

Durée : 1 h 30

N.B. — *Les candidats sont priés :*

1° *D'écrire très lisiblement, de soigner la rédaction et la présentation matérielle. Il convient de numéroter les diverses questions en les séparant très nettement,* de respecter les notations de l'énoncé.

2° *De donner les explications nécessaires et suffisantes en faisant figurer sur la copie tous les calculs intermédiaires.*

3° *De donner les résultats encadrés.*

EXERCICE I

On se propose de trouver une relation fonctionnelle $y = f(x)$ entre les couples de valeurs (x_i, y_i) suivants :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	7,30	9,53	12,47	16,30	21,24	27,73	36,22	47,31	61,78	80,68	105

1° Représenter ces points sur papier millimétrique dans un repère orthogonal d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$ où l'unité sur l'axe Ox sera 0,5 cm et l'unité sur l'axe Oy sera 0,1 cm (graphique I).

2° Représenter, également sur papier millimétrique, les points de coordonnées (x_i, v_i) où $v_i = \log y_i$ (log désigne le logarithme décimal) dans un repère orthogonal d'axes $x'Ox$ et $v'Ov$ où l'unité sur l'axe Ox sera 0,5 cm et l'unité sur l'axe Ov sera 10 cm (graphique II).

3° Former l'équation de la droite de régression de v en x par la méthode des moindres carrés (on indiquera les calculs intermédiaires) et la représenter sur le graphique II.

4° En déduire la relation fonctionnelle de la forme $y = k\,A^x$ liant les couples (x_i, y_i) en déterminant les constantes k et A.

EXERCICE II

Soit X une variable aléatoire réelle pouvant prendre k valeurs distinctes : a_1, a_2, ..., a_k avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_k$. La fonction f définie par :

$\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{i=1}^{i=k} p_i\, e^{a_i t}$ sera appelée « fonction associée à X ».

1° Calculer l'espérance mathématique et la variance de X en fonction de $f'(0)$ et $f''(0)$.

2° On se place dans le cas où $k = 2$.

a. Montrer qu'il existe, de façon unique, une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = g'(t) + q$.

$g(0) = 1$.

q étant un réel donné vérifiant $0 < q < 1$; on posera $p = 1 - q$.

b. Déterminer les réels a_1 et a_2 et les réels p_1 et p_2 de façon que la variable aléatoire X prenant les deux valeurs a_1 et a_2 avec les probabilités correspondantes p_1 et p_2, ait pour fonction associée la fonction g définie en 2° *a.*

3° On considère n variables aléatoires mutuellement indépendantes de Bernoulli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de même loi :

$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $P(X_i = 1) = p$ et $P(X_i = 0) = q = 1 - p$

p étant un réel vérifiant $0 < p < 1$.

a. Définir la loi de probabilité de la variable aléatoire S_n somme des n variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

b. Écrire l'expression de $f(t)$, f étant la fonction associée à S_n, puis exprimer $f(t)$ en fonction de $g(t)$ obtenu en 2° *b.* et de n.

c. Contrôler le résultat obtenu en 3° *b.* en retrouvant les expressions de l'espérance mathématique et de la variance de S_n par l'emploi des résultats obtenus en 1°.

ECOLES VETERINAIRES